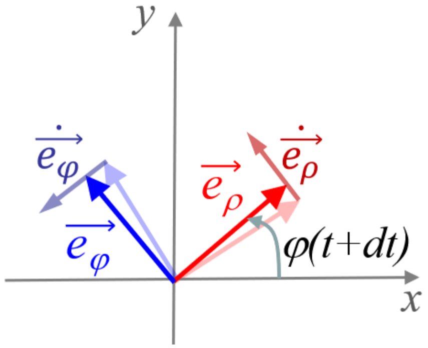
Cours 2 – 12/09/2024

1. Introduction

1.3. Cinématique

1.3.a. Coordonnées cartésiennes

1.3.b. Coordonnées polaires

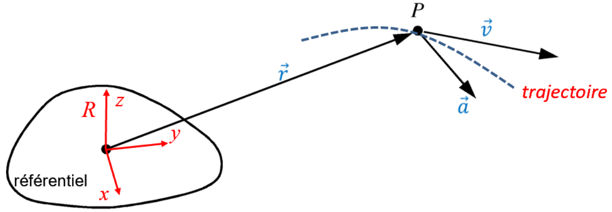


$$\boxed{\dot{\overrightarrow{e_\rho}} = \dot{\varphi}\overrightarrow{e_\varphi} \qquad \dot{\overrightarrow{e_\varphi}} = -\dot{\varphi}\overrightarrow{e_\rho}}$$

1.3. Cinématique

Pour étudier la trajectoire d'un objet, il faut un système de coordonnées afin d'indexer sa position en fonction du temps. Il existe plusieurs systèmes de coordonnées, qui sont plus ou moins bien adaptés au mouvement considéré :

- *coordonnées cartésiennes*
- *coordonnées polaires*
- *coordonnées curvilignes (repère de Frenet)*
- *coordonnées cylindriques*
- *coordonnées sphériques*



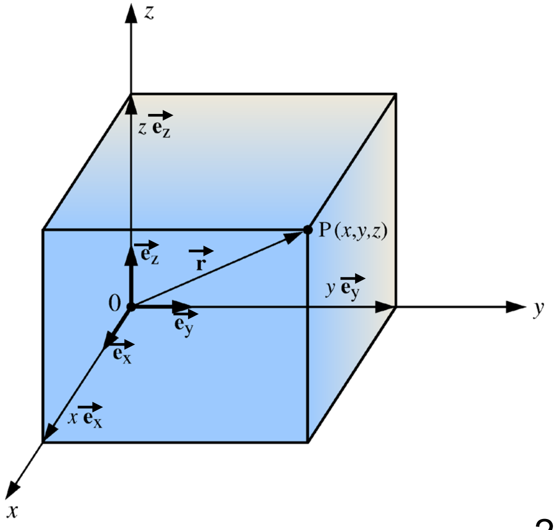
Pour chaque système de coordonnées, un repère permet d'obtenir les composantes des vecteurs *position*, *vitesse*, et *accélération*.

Le repère doit être **orthonormé direct** :

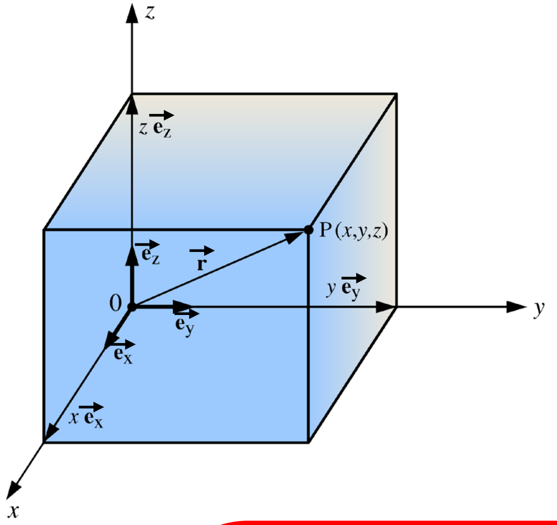
$\vec{e_x}$ $\vec{e_y}$ et $\vec{e_z}$ forment une base orthonormée directe (règle du tire bouchon)

$\vec{e_x}$, $\vec{e_y}$ et $\vec{e_z}$ sont dits « vecteurs de base » du repère

$\vec{e_x}$, $\vec{e_y}$ et $\vec{e_z}$ sont des vecteurs unitaires de norme 1 et formant entre eux des angles à 90°



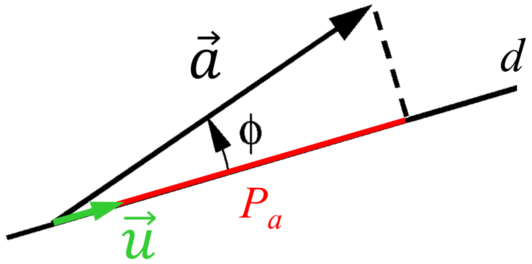
Coordonnées d'un vecteur dans un repère cartésien



La position de P dans le repère R est donnée par le vecteur $\vec{r} = \overrightarrow{OP}$ avec $\vec{r} = x\overrightarrow{e_x} + y\overrightarrow{e_y} + z\overrightarrow{e_z}$

On détermine les composantes x, y, et z du vecteur $\vec{r}$ en le projetant dans la base $\overrightarrow{e_x}\ \overrightarrow{e_y}\ \overrightarrow{e_z}$

Projection : la projection P_a d'un vecteur $\vec{a}$ sur une droite d est le produit scalaire du vecteur $\vec{a}$ par le vecteur unitaire $\vec{u}$ de cette droite, soit $P_a = \vec{a} \cdot \vec{u} = a\, u\, \cos\phi$

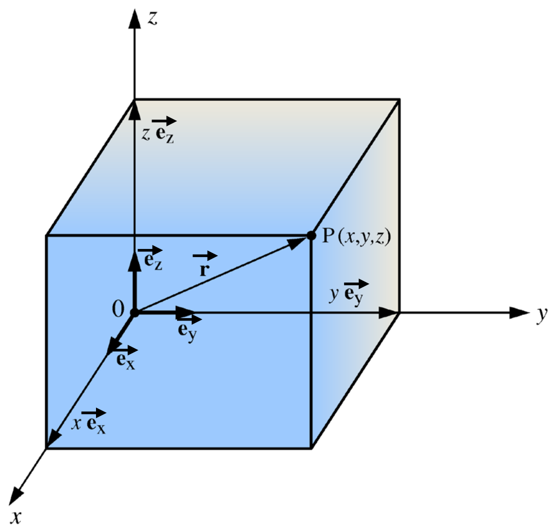


Soit pour les composantes x, y, z :

$$x = \vec{r} \cdot \overrightarrow{e_x}$$
$$y = \vec{r} \cdot \overrightarrow{e_y}$$
$$z = \vec{r} \cdot \overrightarrow{e_z}$$

Les composantes du vecteur $\vec{r}$ sont les coordonnées du point P.

1.3.a. Coordonnées cartésiennes



Vecteur position : $\vec{r} = x\,\overrightarrow{e_x} + y\,\overrightarrow{e_y} + z\,\overrightarrow{e_z}$

$$\vec{r} \longrightarrow \begin{cases} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{cases}$$

$$\mathrm{r} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

Norme du vecteur position

Vecteur vitesse : $\vec{v} = v_x\,\overrightarrow{e_x} + v_y\,\overrightarrow{e_y} + v_z\,\overrightarrow{e_z}$

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} \longrightarrow \begin{cases} v_x = \dot{x}(t) \\ v_y = \dot{y}(t) \\ v_z = \dot{z}(t) \end{cases}$$

$$v = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}$$

Norme du vecteur vitesse

Vecteur accélération : $\vec{a} = a_x\,\overrightarrow{e_x} + a_y\,\overrightarrow{e_y} + a_z\,\overrightarrow{e_z}$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} \longrightarrow \begin{cases} a_x = \ddot{x}(t) \\ a_y = \ddot{y}(t) \\ a_z = \ddot{z}(t) \end{cases}$$

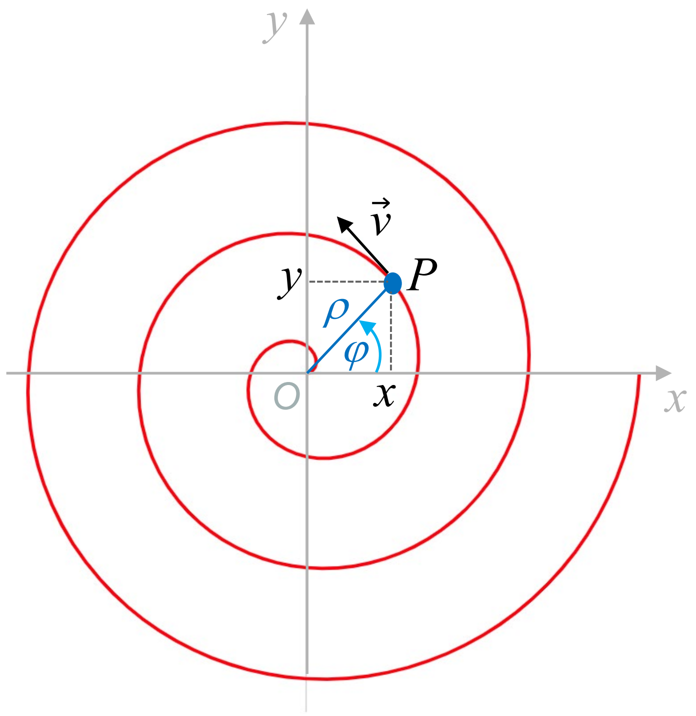
$$a = \sqrt{\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2 + \ddot{z}^2}$$

Norme du vecteur accélération

1.3.a. Coordonnées cartésiennes

Dans certains cas, les coordonnées cartésiennes ne sont pas les plus appropriées

■ <u>Exemple</u> : calcul des composantes a_x et a_y de l'accélération en coordonnées cartésiennes pour un mouvement en spirale (dans un plan) en fonction du rayon ρ et de l'angle φ *(Cf. schéma).*



Exemple : mouvement en spirale

On note $\dot{\rho}$ et $\dot{\varphi}$ les dérivées temporelles de ρ et φ

Expression de x et y en fonction du rayon ρ et de l'angle φ :

$$\begin{cases} x = \rho \cos \varphi \\ y = \rho \sin \varphi \end{cases}$$

Att : φ et ρ dépendent du temps

Expression des composantes du vecteur vitesse en fonction de ρ et φ :

$$\begin{cases} v_x = \dfrac{dx}{dt} \\ v_y = \dfrac{dy}{dt} \end{cases}$$

Il faut dériver le produit de deux fonctions :

$\rho(t) \cos \varphi(t)$ et $\rho(t) \sin \varphi(t)$

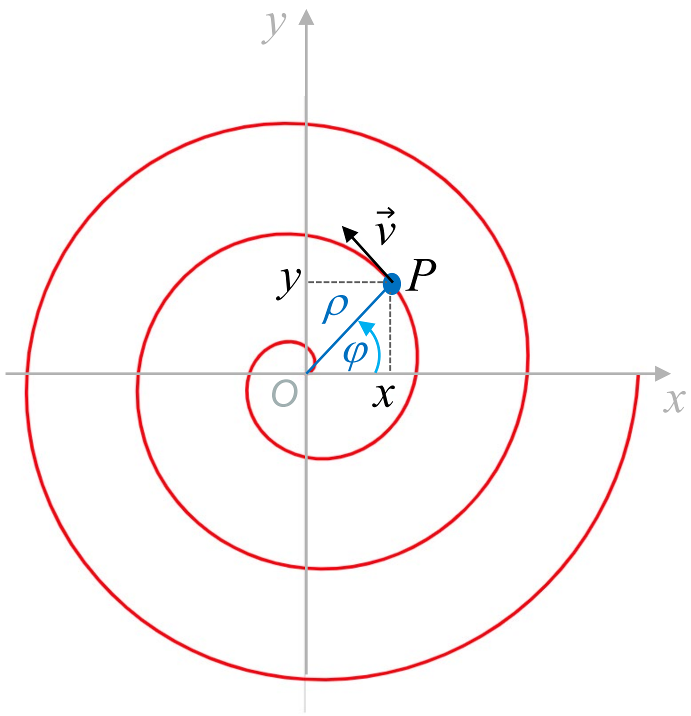
et des fonctions composées $\cos \varphi(t)$ et $\sin \varphi(t)$)

1.3.a. Coordonnées cartésiennes

<u>Rappel</u> : dérivées de produits de fonctions et de fonctions composées

$(uv)' = v'u + u'v$ *dérivée du produit de deux fonctions*

$(g \circ f)' = f'\, g'(f)$ *dérivée d'une fonction composée*



Exemple : mouvement en spirale

Expression des coordonnées x et y :

$$\begin{cases} x = \overbrace{\rho}^{u}\ \overbrace{\cos\varphi}^{v} \quad \text{avec} \quad v = (g \circ f) = \overbrace{cos}^{g}\,\overbrace{\varphi(t)}^{f} \\ y = \rho \sin\varphi \end{cases}$$

Expression des composantes du vecteur vitesse en fonction de ρ et φ :

$$\begin{cases} v_x = \dfrac{dx}{dt} = \overbrace{\rho}^{u}\ \overbrace{(\underbrace{\dot{\varphi}}_{f'}\ \underbrace{(-\sin\varphi)}_{g'(f)})}^{v'} + \overbrace{\dot{\rho}}^{u'}\ \overbrace{\cos\varphi}^{v} = -\rho\,\dot{\varphi}\sin\varphi + \dot{\rho}\cos\varphi \\ v_y = \dfrac{dy}{dt} = \rho\,(\dot{\varphi}\cos\varphi) + \dot{\rho}\sin\varphi = \rho\,\dot{\varphi}\cos\varphi + \dot{\rho}\sin\varphi \end{cases}$$

1.3.a. Coordonnées cartésiennes

Expression des composantes du vecteur accélération pour un mouvement circulaire en fonction de ρ et φ :

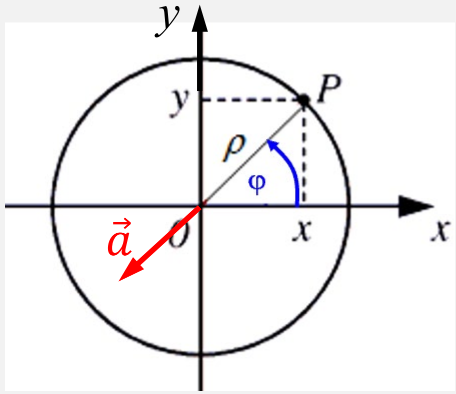
$$\begin{cases} a_x = \dfrac{dv_x}{dt} = \dfrac{d}{dt}\left[-\rho\,\dot{\varphi}\sin\varphi + \dot{\rho}\cos\varphi\right] = -\rho\left[\ddot{\varphi}\sin\varphi + \dot{\varphi}\dot{\varphi}cos\varphi\right] - \dot{\rho}\,(\dot{\varphi}\sin\varphi) + \ddot{\rho}\cos\varphi - \dot{\rho}(\dot{\varphi}\sin\varphi) \\ \quad = -\rho\left[\ddot{\varphi}\sin\varphi + \dot{\varphi}^2 cos\varphi\right] - 2\dot{\rho}\dot{\varphi}\sin\varphi + \ddot{\rho}\cos\varphi \\ a_y = \dfrac{dv_y}{dt} = \dfrac{d}{dt}\left[\rho\,\dot{\varphi}\cos\varphi + \dot{\rho}\sin\varphi\right] \\ \quad = \rho\left[\ddot{\varphi}\cos\varphi - \dot{\varphi}^2 sin\varphi\right] + 2\dot{\rho}\dot{\varphi}\,cos\,\varphi + \ddot{\rho}sin\varphi \end{cases}$$

<u>Cas particulier</u> : mouvement circulaire uniforme (ρ et $\dot{\varphi}$ constants) $\Rightarrow \dot{\rho} = 0, \ddot{\rho} = 0,\ et\ \ddot{\varphi} = 0$

$$\begin{cases} a_x = -\rho\,\dot{\varphi}^2 cos\varphi \\ a_y = -\,\rho\dot{\varphi}^2 sin\varphi \end{cases}$$

soit $a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = \rho\,\dot{\varphi}^2 = \rho\,\omega^2$

ω : *vitesse angulaire*



On reconnait ici l’accélération centripète pour un mouvement circulaire uniforme

1.3.b. Coordonnées polaires

Les expressions des composantes du vecteur accélération exprimées en fonction de ρ et φ sont compliquées en coordonnées cartésiennes pour un mouvement circulaire quelconque.

Il existe un système de coordonnées plus approprié qui permet de simplifier les expressions des vecteurs vitesse et accélération pour un mouvement circulaire dans un plan (2D).

Coordonnées cartésiennes

$$\vec{a} = a_x\overrightarrow{e_x} + a_y\overrightarrow{e_y}$$

$$\begin{cases} a_x = -\rho\,[\ddot{\varphi}\sin\varphi + \dot{\varphi}^2 cos\varphi] - 2\dot{\rho}\dot{\varphi}\sin\varphi + \ddot{\rho}\cos\varphi \\ a_y = \rho[\ddot{\varphi}\cos\varphi - \dot{\varphi}^2 sin\varphi] + 2\dot{\rho}\dot{\varphi}\,cos\,\varphi + \ddot{\rho} sin\varphi \end{cases}$$

Coordonnées polaires

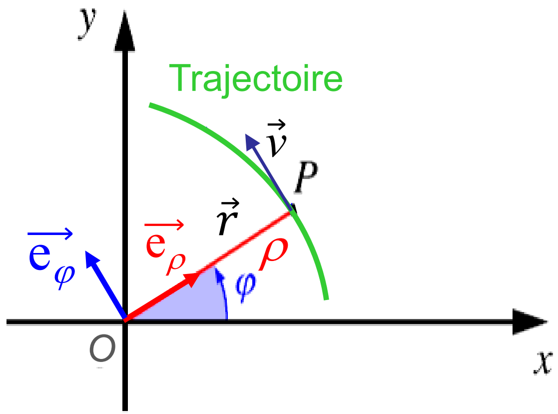
$$\vec{a} = a_\rho\vec{e}_\rho + a_\varphi\vec{e}_\varphi$$

$$\begin{cases} a_\rho = \ddot{\rho} - \rho\dot{\varphi}^2 \\ a_\varphi = 2\dot{\rho}\dot{\varphi} + \rho\ddot{\varphi} \end{cases}$$

$\Rightarrow$ *nous allons voir dans ce qui suit ce que sont* $\overrightarrow{e_\rho}$ et $\overrightarrow{e_\varphi}$

1.3.b. Coordonnées polaires

■ Définition



Coordonnées polaires – GeoGebra

Le système de coordonnées polaires est un système de coordonnées à 2 dimensions:

La position du point *P* est définie par sa distance ρ à l'origine O du repère et par un angle φ. φ est défini entre l'axe Ox et un axe, appelé axe polaire, qui porte le vecteur $\overrightarrow{OP}$.

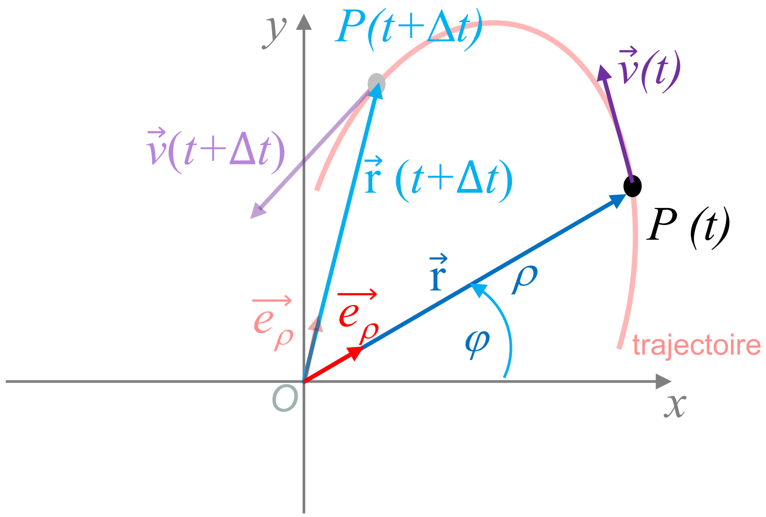
Les vecteurs unitaires orthonormés sont $\overrightarrow{e_\rho}$ et $\overrightarrow{e_\varphi}$

$\overrightarrow{e_\rho}$ et $\overrightarrow{e_\varphi}$ dépendent du temps car φ *et* ρ dépendent du temps ⚠

La position du point P est définie par le vecteur position $\vec{r}$ avec $\vec{r} = \rho\overrightarrow{e_\rho}$

1.3.b. Coordonnées polaires

■ Vecteur position et vecteur vitesse



La position du point P est repérée par le vecteur $\vec{r}$ tel que

$$\vec{r} = \rho\,\overrightarrow{e_\rho}$$

Le vecteur $\overrightarrow{e_\rho}$ est un vecteur unitaire, qui forme un angle φ avec l'axe Ox.

La vitesse du point P est définie par le vecteur $\vec{v}$ tel que

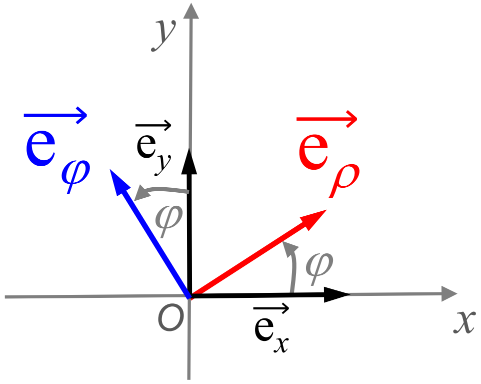
$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d}{dt}(\rho\overrightarrow{e_\rho})$$

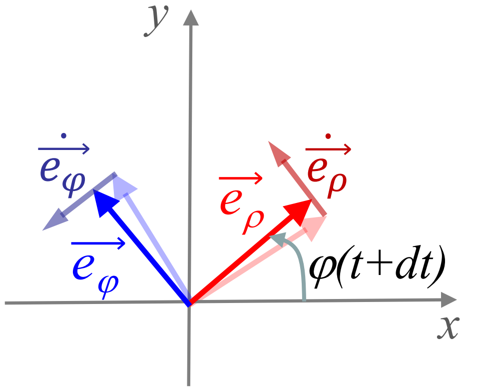
$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d}{dt}(\rho\overrightarrow{e_\rho}) = \dot{\rho}\overrightarrow{e_\rho} + \rho\dot{\overrightarrow{e_\rho}}$$ car ρ et $\overrightarrow{e_\rho}$ varient dans le temps

⇒ Il faut calculer la dérivée du vecteur $\overrightarrow{e_\rho}$

1.3.b. Coordonnées polaires

■ Dérivées temporelles de $\overrightarrow{e_\rho}$ et vecteur $\overrightarrow{e_\varphi}$





$$\overrightarrow{e_\rho} = \cos\varphi\,\overrightarrow{e_x} + \sin\varphi\,\overrightarrow{e_y}$$

$$\dot{\overrightarrow{e_\rho}} = -\dot{\varphi}\sin\varphi\,\overrightarrow{e_x} + \dot{\varphi}\cos\varphi\,\overrightarrow{e_y}$$

$$\overrightarrow{e_\varphi} = -\sin\varphi\,\overrightarrow{e_x} + \cos\varphi\,\overrightarrow{e_y}$$

$$\dot{\overrightarrow{e_\varphi}} = -\dot{\varphi}\cos\varphi\,\overrightarrow{e_x} - \dot{\varphi}\sin\varphi\,\overrightarrow{e_y}$$

$$\boxed{\dot{\overrightarrow{e_\rho}} = \dot{\varphi}\overrightarrow{e_\varphi} \qquad \dot{\overrightarrow{e_\varphi}} = -\dot{\varphi}\overrightarrow{e_\rho}}$$

avec $\dot{\varphi} = \omega$ vitesse angulaire

1.3.b. Coordonnées polaires

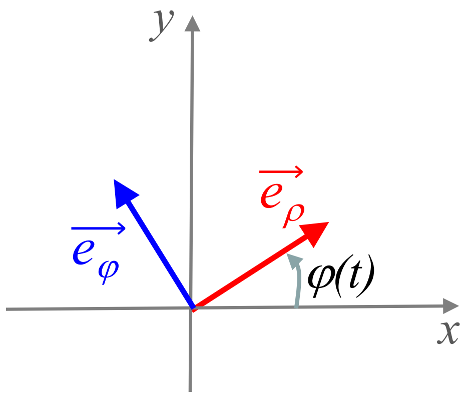
■ Vecteurs de base $\overrightarrow{e_\rho}$ et $\overrightarrow{e_\varphi}$

On peut vérifier que $\overrightarrow{e_\rho}$ et $\overrightarrow{e_\varphi}$ sont perpendiculaires

on rappelle que le produit scalaire de vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$ est $a_x b_x + a_y b_y$

soit $\overrightarrow{e_\rho} \cdot \overrightarrow{e_\varphi} = \cos\varphi\,(-\sin\varphi) + \sin\varphi\cos\varphi = 0 \Longrightarrow \overrightarrow{e_\rho} \perp \overrightarrow{e_\varphi}$

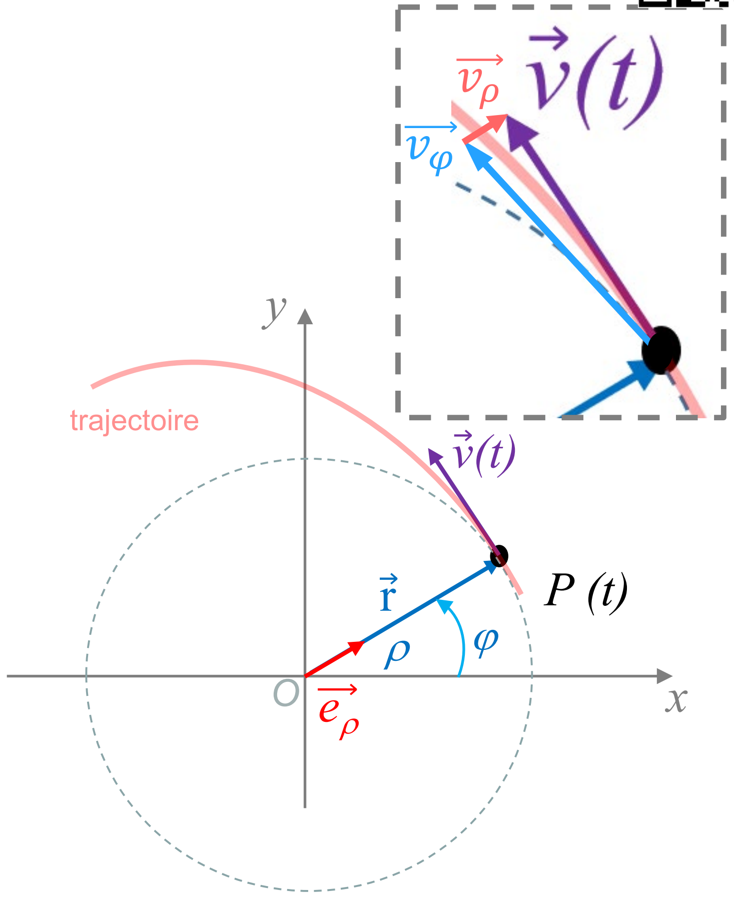
- $\overrightarrow{e_\rho}$ et $\overrightarrow{e_\varphi}$ forment une base orthonormée
- $\overrightarrow{e_\rho}$ et $\overrightarrow{e_\varphi}$ dépendent du temps
- $\overrightarrow{e_\rho}$ forme un angle φ avec l'axe Ox



1.3.b. Coordonnées polaires

Equation générale du mouvement : $\vec{r} = \rho\,\overrightarrow{e_\rho}$

Position du point P dans le repère polaire en fonction du temps



- **Vitesse** exprimée dans le repère $(O;\overrightarrow{e_\rho},\overrightarrow{e_\varphi})$

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d}{dt}(\rho\overrightarrow{e_\rho}) = \dot{\rho}\overrightarrow{e_\rho} + \rho\dot{\overrightarrow{e_\rho}} \quad \text{avec} \quad \dot{\overrightarrow{e_\rho}} = \dot{\varphi}\,\overrightarrow{e_\varphi} \quad \text{d'où} \quad \frac{d\vec{r}}{dt} = \underline{\dot{\rho}\overrightarrow{e_\rho}} + \underline{\rho\dot{\varphi}\overrightarrow{e_\varphi}}$$

$$\text{soit} \quad \vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \underline{v_\rho\overrightarrow{e_\rho}} + \underline{v_\varphi\overrightarrow{e_\varphi}} \quad \begin{cases} \boxed{\begin{array}{l} v_\rho = \dot{\rho} \\ v_\varphi = \rho\dot{\varphi} \end{array}} \end{cases}$$

vitesse radiale

vitesse tangentielle

- **Accélération** exprimée dans le repère $(O;\overrightarrow{e_\rho},\overrightarrow{e_\varphi})$

$$\dot{\overrightarrow{e_\rho}} = \dot{\varphi}\overrightarrow{e_\varphi}$$
$$\dot{\overrightarrow{e_\varphi}} = -\dot{\varphi}\overrightarrow{e_\rho}$$

$$\frac{d}{dt}\overrightarrow{v_\rho} = \frac{d}{dt}\dot{\rho}\overrightarrow{e_\rho}$$

$$\frac{d}{dt}\overrightarrow{v_\varphi} = \frac{d}{dt}\rho\dot{\varphi}\overrightarrow{e_\varphi}$$